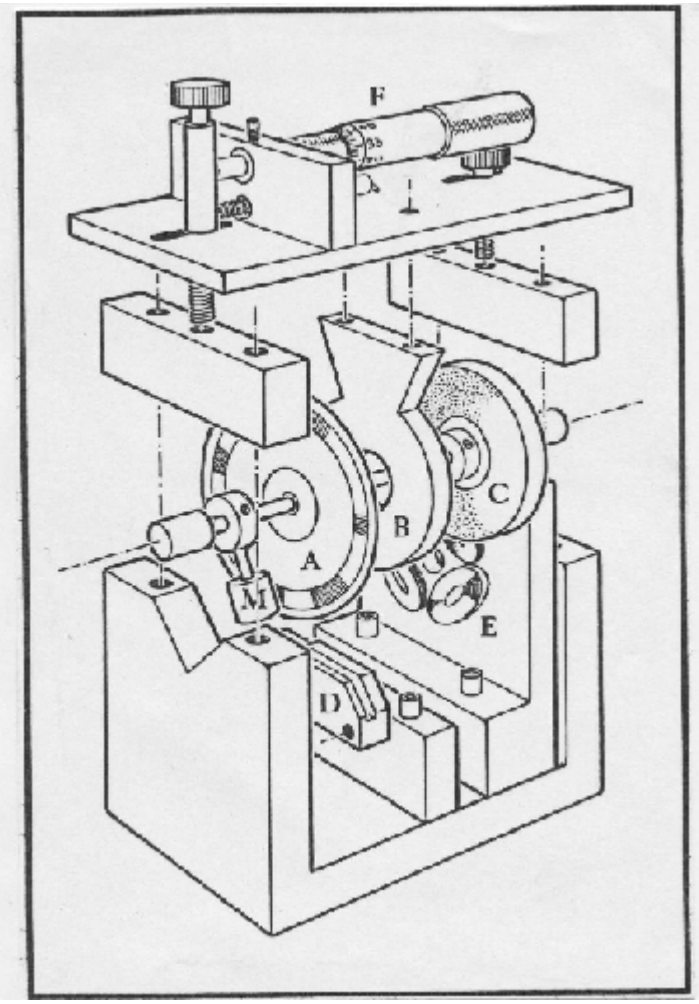
TP MECANIQUE 1: PENDULE CHAOTIQUE



B. AMANA et J.-L. LEMAIRE

LE PENDULE CHAOTIQUE

Introduction

Le Pendule excité est un exemple d'un système mécanique non linéaire du 2ème ordre qui peut présenter des mouvements périodiques, multi-périodiques ou chaotiques.

Comme aide visuelle pour l'analyse du comportement du pendule, deux diagrammes particuliers sont construits à partir des valeurs de $\theta(t)$ et $d\theta/dt$ (où θ est l'angle du pendule avec une direction de référence et la vitesse angulaire) enregistrées au cours du temps.

Le diagramme dans l'espace des phases.

La représentation du mouvement du pendule dans l'espace des phases est construite à partir des couples de coordonnées θ (t) successifs.
Si le déplacement θ est mesuré par rapport à la position au repos verticale, alors le simple mouvement d'oscillation sera représenté par une orbite elliptique dans l'espace de phase et sera contenu dans l'intervalle
$[-\pi,\pi]$. Lorsque des rotations complètes ont lieu deux stratégies peuvent être adoptées:

a) L'intervalle des θ peut être étendu à $[-3\pi , 3\pi]$, ou à $[-5\pi , 5\pi]$, etc.
b) Le mouvement en dehors de l'intervalle $[-\pi , \pi]$ peut être replié à l'intérieur de ce domaine.

Ce second choix est celui qui est le plus souvent adopté dans la littérature. Il a pour avantage la compacité, son inconvénient provient du fait que le repliement rend indiscernable les particularités de certaines orbites.
Un exemple en est donné par les deux figures suivantes obtenues à partir des mêmes données expérimentales.

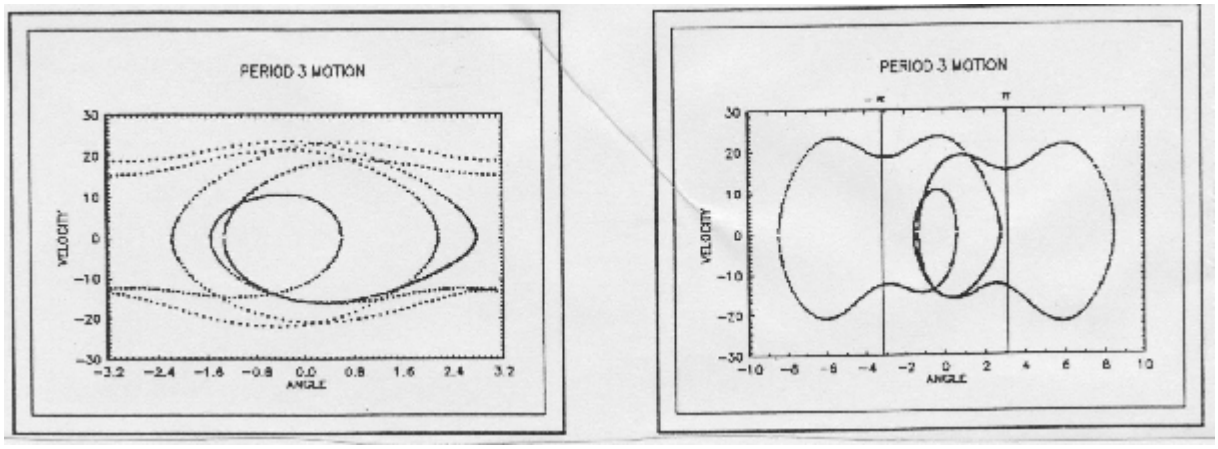


Figure 1 et 2

Dans ce cas particulier, la représentation non repliée montre la répétitivité dans l'espace des phases d'orbites fermées. Dans le cas où un décalage d'ensemble (dans le sens des aiguilles d'une montre ou l'inverse), est superposé aux oscillations, il ne sera pas possible de contenir les orbites dans des intervalles finis de θ**.** Un intervalle étendu pourra cependant aider à visualiser le mouvement comme on peut le constater sur la figure suivante.

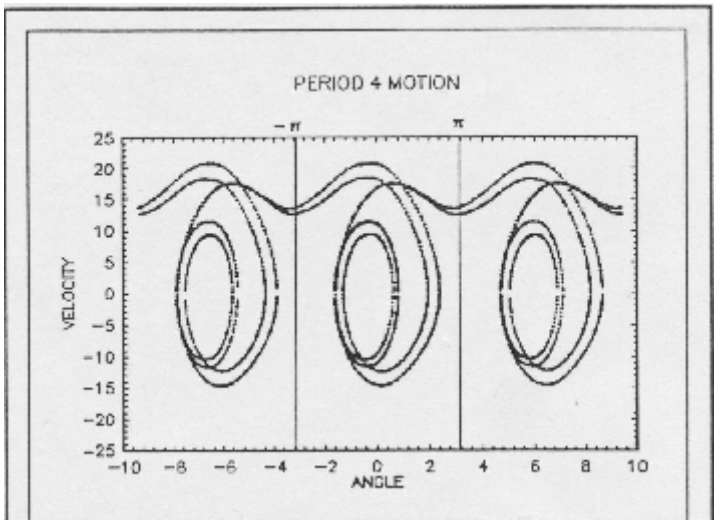


Figure 3

La figure 4 montre une orbite chaotique typique , tracée sur 5 cycles.

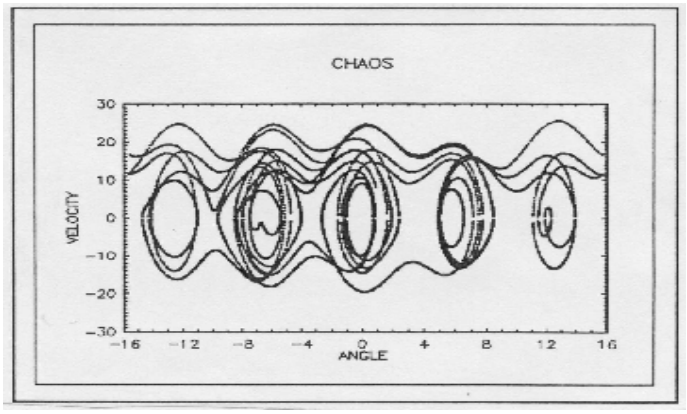


Figure 4

Le diagramme de Poincaré

Le diagramme de Poincaré est également tracé dans l'espace des phases mais il est obtenu en échantillonnant le mouvement du pendule une seule fois à chaque période du couple sinusoïdal d'excitation. Cela peut être considéré comme une succession d'images stroboscopiques du mouvement dans l'espace des phases. Un mouvement périodique simple apparaîtra dans le plan de phase comme un point unique répétitif. Un mouvement à deux périodes produira un diagramme de Poincaré ne comprenant que deux points. Et ainsi de suite. Parce que ces points représentent des états périodiques stables du système, ils sont appelés attracteurs. Dans le cas du chaos, par contre, il n'y a pas de périodicité fixe sous-jacente et ainsi chaque point nouveau sera différent de tous les autres dans l'espace des phases. Cependant, au fur et à mesure que les points s'accumulent sur le diagramme de Poincaré, une structure distincte pourra émerger. On la désigne sous le nom d'attracteur étrange. Un exemple obtenu à partir de 2000 points enregistrés à l'aide du pendule est montré ci-après.

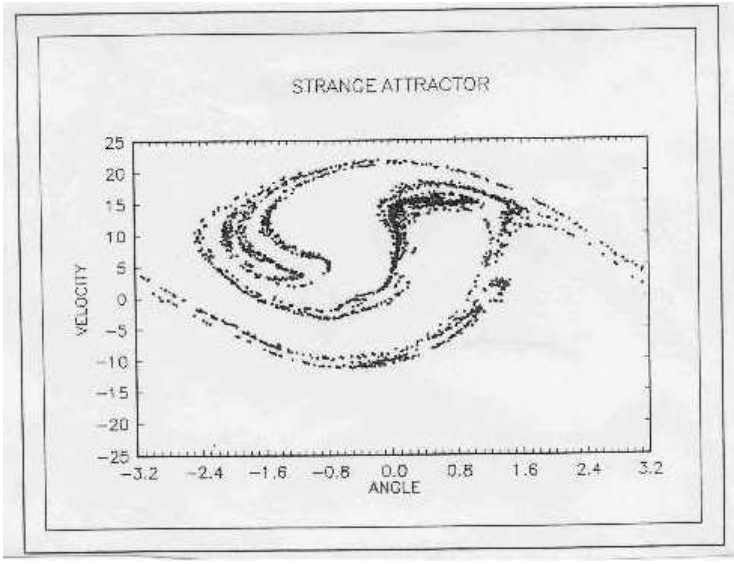


Figure 5

Travaux proposés

Avant d'aborder l'aspect "**pendule chaotique**", un certain nombre d'expériences concernent successivement le pendule libre, le pendule amorti, le pendule excité et l'étude de la résonance.

Afin de vous aider dans la réalisation de ce TP, il est impératif d'avoir lu avant d'aborder le travail pratique proprement dit, la description du pendule chaotique, son manuel d'utilisation et celui du logiciel associé.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL

L'appareil consiste en un petit pendule (dont l'axe de rotation repose sur des roulements à bille) excité par une couple sinusoïdal d'amplitude et fréquence réglable. Un amortissement dépendant de la vitesse est produit par les courants de freinage induits dans une plaque de cuivre par un aimant en anneau situé en regard. La distance aimant-plaque de cuivre est réglable par une vis micrométrique.

Un capteur de position angulaire (roue codeuse), solidaire de l'axe du pendule permet de repérer les angles avec une précision de ±0,1°. Cette précision permet de faire des mesures quantitatives excellentes du mouvement du pendule.

Les oscillations forcées sont produites par un moteur sans balais ni enroulement. Son rotor est en fait l'aimant annulaire à 8 pôles fixé sur l'axe du pendule. Le stator est constitué de 4 bobinages montés sur un circuit imprimé et alimenté par un oscillateur de précision ($\pm 0{,}001 H_Z$). Ce dispositif conduit à un couple d'excitation sinusoïdal.

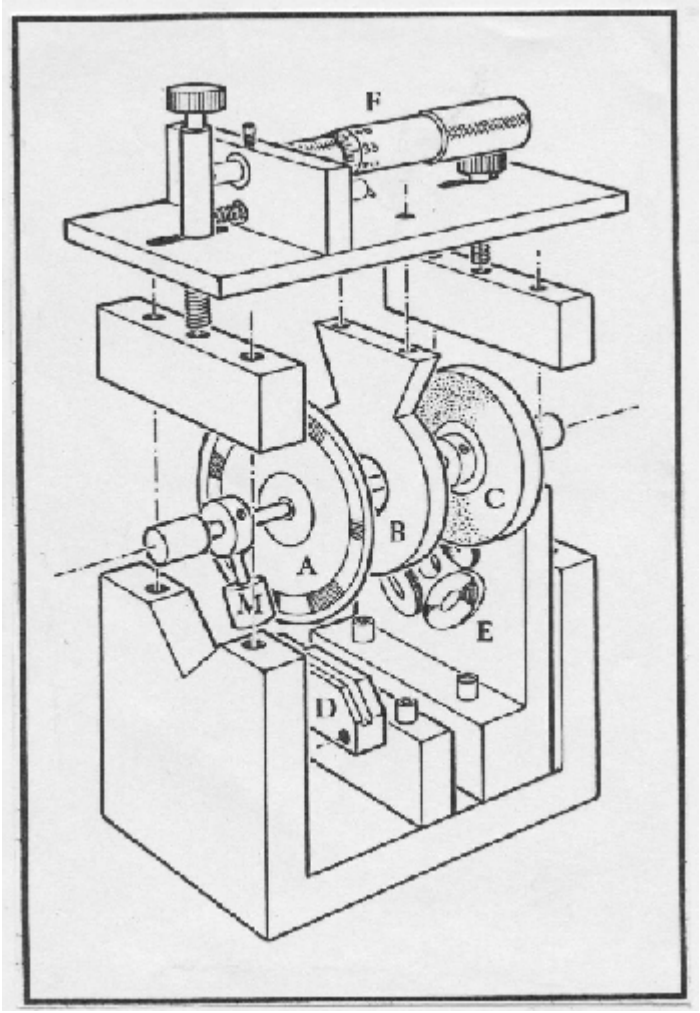
Un dispositif électronique monté sur une carte d'extension placée dans l'ordinateur décode la position et le sens de rotation du pendule à la cadence de 50 KH_Z.

Manuel d'utilisation pour le pendule chaotique EM50

Attention:

La roue codeuse (A) faite d'un fin disque d'aluminium **ne doit pas être manipulée, au risque d'être endommagée.**

Ne pas la toucher en excitant le pendule manuellement



A. roue codeuse
B. amortisseur en cuivre
C. aimant annulaire
D. capteur de la roue codeuse
E. bobines d'excitation
F. vis micrométrique
M. pendule

MANUEL D'UTILISATION

Tourner la vis micrométrique (F) en sens inverse des aiguilles d'une montre pour écarter l'aimant annulaire (C) de l'amortisseur en cuivre (B). Le pendule (M) doit alors se mouvoir librement. Le toucher doucement pour le mettre en mouvement **Ne pas toucher le roue codeuse (A)** pour obtenir ce résultat.

Connections: Le câble DB15 est connecté entre le pendule et l'excitateur.

Le câble DB9 est connecté entre le pendule et le boîtier d'entrées logiques via une terminaison DIN. Relier la voie 0 (respectivement la voie 1) du boîtier d'entrées logiques à la voie 0 (respectivement la voie 1) du boîtier d'entrées/sorties de la carte d'acquisition FastLab..

Relier l'excitateur (sortie output sync) et l'entrée synchro du boîtier de la carte d'acquisition. Faire attention. (ce câblage est nécessaire pour observer le diagramme de Poincaré sur l'ordinateur).

Mise en route et essais des différentes fonctions:

1) Vérifier que l'excitateur est éteint

2) Allumer l'ordinateur.
A la mise sous tension l'ordinateur se met sous Windows 95.

Aller dans le répertoire ***Pendule*** puis lancer le logiciel **PCHAOT2005.EXE**

3) Tourner le bouton amplitude complètement à gauche et allumer l'excitateur

4) Si le bouton "Drive" est allumé, appuyer une fois pour l'éteindre. Dans ce cas, aucune excitation ne sera appliquée au pendule.

Bouger doucement le pendule. Une trace en spirale doit apparaître qui se rapprochera du milieu de la fenêtre jusqu'à ce que le pendule arrête de bouger.

Si l'amortisseur en cuivre (B) se trouve à moins de 5mm de l'aimant annulaire (C) le mouvement s'arrêtera en quelques oscillations. En tournant la vis micrométrique (F) le coefficient d'amortissement peut être modifié.

Lorsque l'on ajuste l'amortissement "au vol" (c'est à dire quand le pendule est encore en train d'osciller) il est recommandé de déplacer l'amortisseur en cuivre (B) vers l'aimant annulaire (C) de façon à augmenter l'amortissement du système.

Attention: Ne pas déplacer l'amortisseur en cuivre jusqu'à toucher l'aimant annulaire.

CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES DU SYSTÈME EM50

(Daedalon Corporation)

Excitateur - fréquence 0,3 à 3 Hz
- lecture LED à 4 digits
- résolution 0,001 Hz
- cadence de mesure de la lecture 1s
- controles: Power switch: interrupteur général
  Drive switch: interrupteur de l'excitation
  Frequency adjust: réglage de la fréquence
  Torque amplitude adjust: réglage de l'amplitude du couple

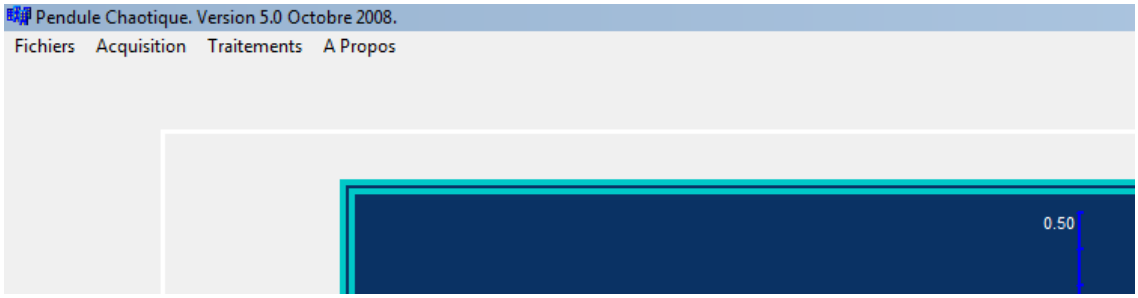
Pendule - résolution angulaire 0,1°
- longueur 2 cm
- fréquence naturelle (seul 1,5 Hz, 066 H_Z avec tous les composants)
- amortissement Q du pendule de 2 à 45
- contrôle de l'amortissement par vis micrométrique 0 à 12 mn. amortissement par courant tourbillonnant dépendant de la vitesse.
- cadence de mesure 50 KHz

Ordinateur PC-AT avec coprocesseur
Ecrans acceptés: MCGA, CGA, EGA Mono, VGA et Hercules
Fréquence d'horloge < 20 MHz recommandée pour des résultats fiables

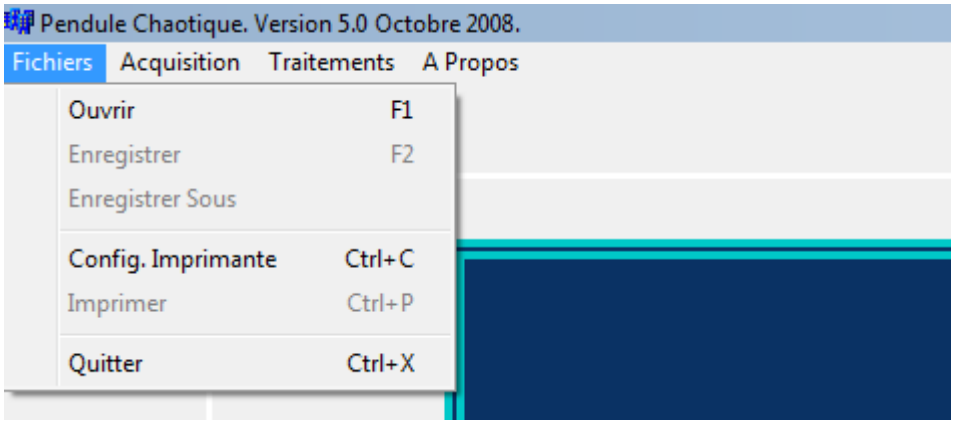
Le Logiciel de Capture et de Traitement des Donnees ((PendChaot2009**.exe)**

MANUEL D'UTILISATION DU LOGICIEL du PENDULE Chaotique (PendChaot2009**.exe)**

Les différents menus de PendChaot2009 sont les suivants: Fichiers, Acquisition, Traitements , A propos.



Menu Fichiers



Le menu Fichiers comme dans la plupart des logiciels écrits sous Windows contient des sous-menus
Ouvrir, Enregistrer, Configurer Imprimante, Imprimer et Quitter.

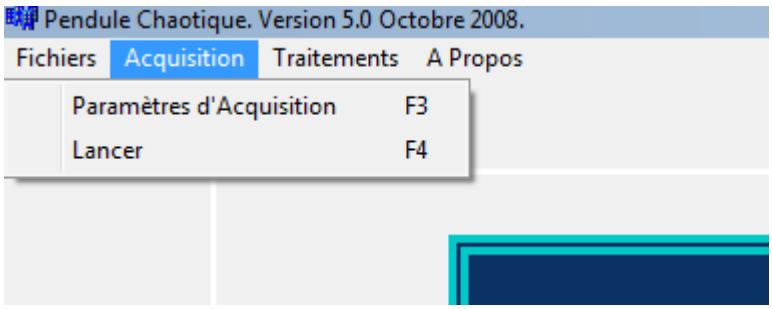
Fichiers/Ouvrir :permet d'ouvrir uniquement les fichiers préenregistrés sous **PendChaot2009** et d'afficher les courbes correspondantes.

Fichiers/Enregistrer : comme son nom l'indique permet de sauvegarder les données acquises dans un fichier sous format texte et d'extension **.pch**.

Fichiers/Config. Imprimante : permet de sélectionner l'imprimante sur laquelle devra s'effectuer l'impression des courbes.

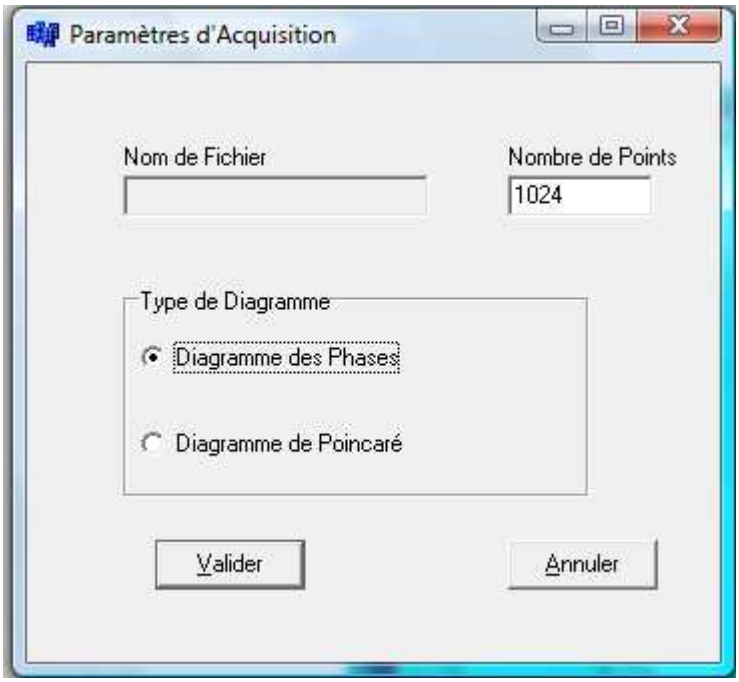
Fichiers/Imprimer: pour lancer les taches d'impression.

Menu Acquisition



Le menu Acquisition permet selon la page choisie (via l'onglet en bas de page d'accueil) d'enregistrer et de représenter le mouvement du pendule dans l'espace des phases ($d\theta/dt$, θ), d'afficher le diagramme de Poincaré qui est la représentation du mouvement du pendule dans l'espace des phases en l'échantillonnant une fois à chaque période du couple sinusoïdal d'excitation, d'afficher les réponses temporelle et fréquentielle (FFT).

Acquisition/Paramètres d'Acquisition : Permet de fixer les conditions d'acquisition (nombre de points) de même que la nature des courbes à acquérir (diagramme des phases ou de Poincaré.



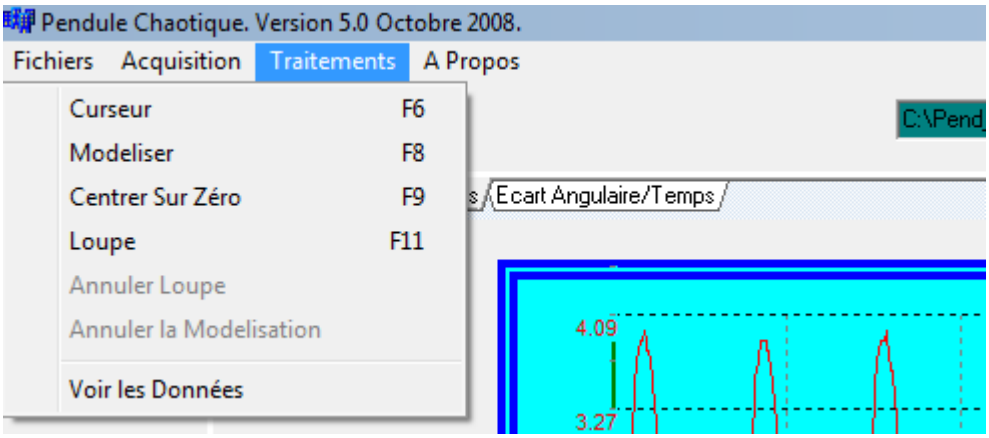
Acquisition/Lancer : débute l'acquisition ; l'arrêt se fait à l'aide de la touche *FIN (ou END).*

Une fois l'acquisition effectuée, les onglets du dessus permettent de choisir l'ordonnée des courbes à afficher (**vitesse angulaire ou écart angulaire).**

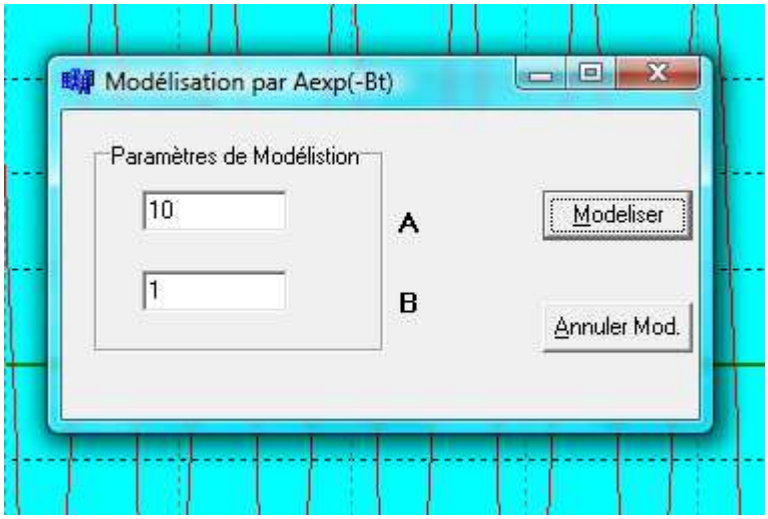
N.B. : Les données visualisées dans cette procédure ne sont pas encore enregistrées. Pour cela, utiliser le menu Fichiers/Enregistrer.

Menu Traitements

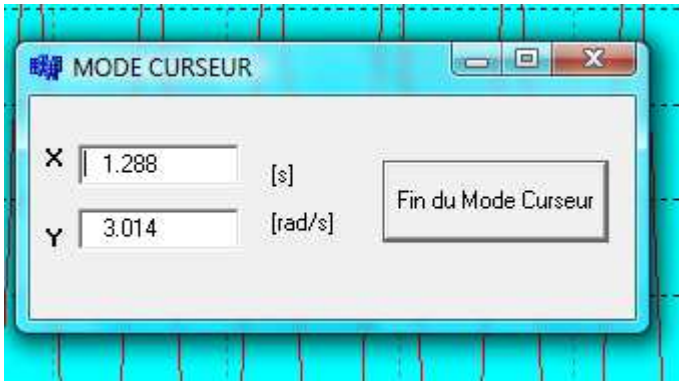
Ce menu permet de tracer les courbes des écarts ou vitesses angulaires en fonction du temps ou de la fréquence. Ce menu contient également un certain nombre d'outils permettant d'effectuer des calculs sur les données acquises ou de régler au mieux l'affichage de courbes sur l'écran.



Modéliser : utile pour la modélisation (par une exponentielle décroissante) des courbes lors des expériences de mesure des coefficients d'amortissement .

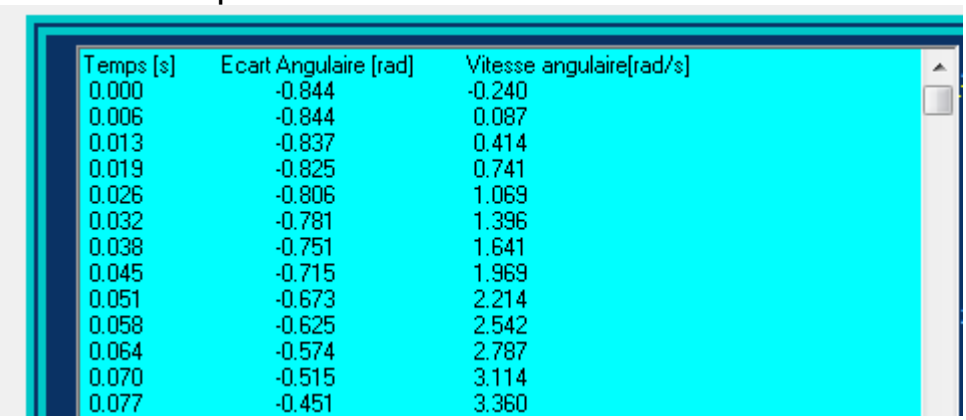


Curseur :donne les coordonnées de la position courante du curseur. Très utile pour les mesures.



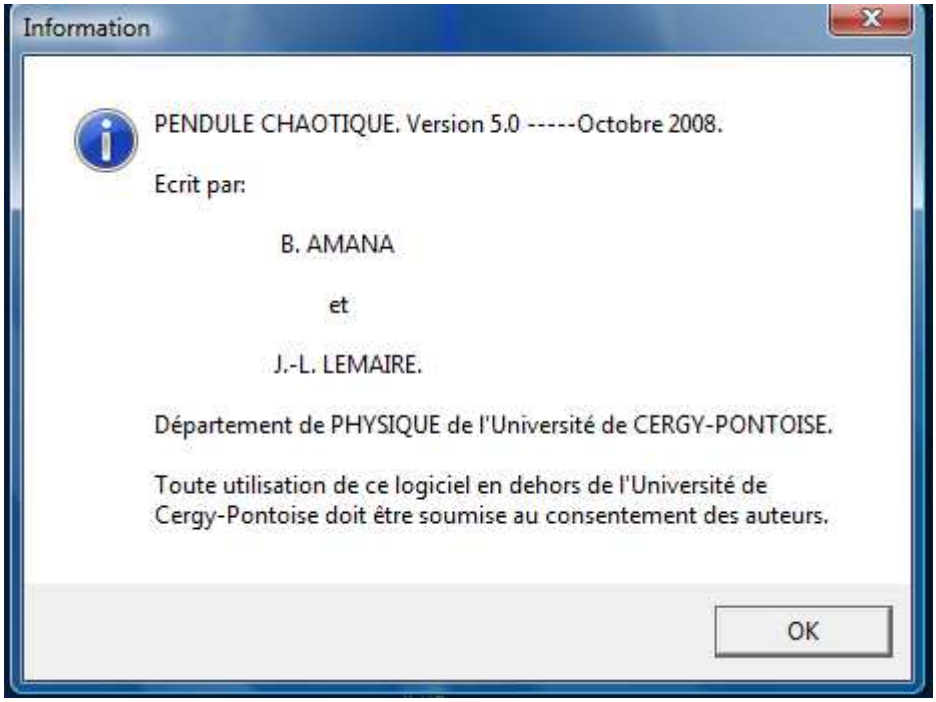
Traitements/Centrage Sur Zéro :permet de centrer sur l'axe des abscisses les courbes affichées.

Traitements/Voir les Données : permet de visualiser les données acquises.

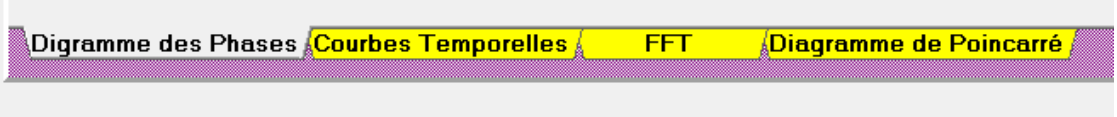


Temps [s]	Ecart Angulaire [rad]	Vitesse angulaire[rad/s]
0.000	-0.844	-0.240
0.006	-0.844	0.087
0.013	-0.837	0.414
0.019	-0.825	0.741
0.026	-0.806	1.069
0.032	-0.781	1.396
0.038	-0.751	1.641
0.045	-0.715	1.969
0.051	-0.673	2.214
0.058	-0.625	2.542
0.064	-0.574	2.787
0.070	-0.515	3.114
0.077	-0.451	3.360

Menu A Propos…. :Informations sur le logiciel ***Pchaot2005.***


Information
PENDULE CHAOTIQUE. Version 5.0 -----Octobre 2008.
Ecrit par:
B. AMANA
et
J.-L. LEMAIRE.
Département de PHYSIQUE de l'Université de CERGY-PONTOISE.
Toute utilisation de ce logiciel en dehors de l'Université de Cergy-Pontoise doit être soumise au consentement des auteurs.
OK

Onglets en bas d'écran :



Ces onglets permettent de réaliser toutes les actions concernant les diagrammes des phases et de Poincaré, d'afficher les courbes temporelles afin d'y effectuer tous les traitements possibles, de calculer la transformée de Fourier des données acquises ou enregistrées.

PROCEDURES DE CALIBRATION

Le pendule peut être décrit comme une masse m suspendue à une distance r de l'axe du système. Le moment d'inertie totale I est dû à la fois à la masse et à toute l'inertie additionnelle des composants rotatifs fixés sur l'axe (principalement l'aimant annulaire, la roue codeuse optique et les disques fixés sur l'axe). Si un couple T est appliqué au système à l'aide des bobines excitatrices, alors l'équation du mouvement du pendule s'écrit:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\sin\theta = T \quad (1)$$

où b est le coefficient d'amortissement provenant de l'interaction électrodynamique entre le disque magnétique en anneau et la plaque fixe "à courant tournant".

EXPERIENCE 1

Ne faire cette expérience qu'en fin de TP, si vous disposez de suffisamment de temps. Utiliser la fréquence propre donnée (T_0 = 0.68 seconde).
La procédure d'enregistrement de fichiers qui sera utilisée dans toutes les autres expériences est cependant décrite ici

Détermination de la fréquence propre du pendule.

Ajuster le micromètre de telle sorte que la plaque de cuivre soit bien séparée du disque magnétique(1cm ou plus); b est alors approximativement nul. Supprimer tout signal de couple (T=0). L'équation (1) du pendule devient dans ce cas:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\sin\theta = 0 \quad (2)$$

Pour les petits angles $\sin\theta \approx \theta$ et la fréquence de l'oscillation vaut:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \qquad (3)$$

La période d'oscillation pour un angle maximal de déplacement peut être obtenu de façon analytique à partir de l'équation différentielle (2):

$$T = T_0\left[\frac{2}{\pi}K(k)\right] \qquad (4)$$

où K(k) est une intégrale elliptique de première espèce , k = $\sin(\theta_m/2)$ et T_0 est la période du pendule dans le cas des oscillations infinitésimales. La variation de la période avec l'angle de déplacement maximal est illustrée sur la figure 6 où T/T_0 est la période normalisée.

<u>Cette expérience doit être réalisée avec un soin particulier.</u>

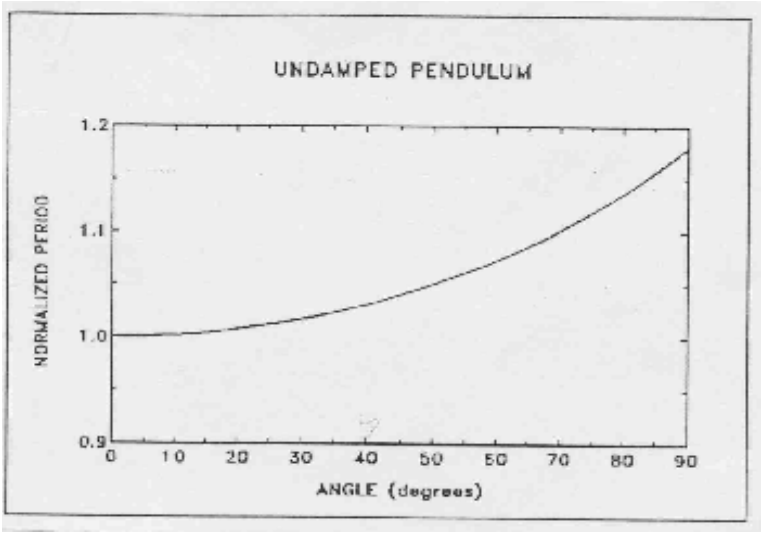


Figure 6

<u>Détermination expérimentale de T_0</u>

Mesurer la période du pendule pour une série d'angles maximaux décroissants et extrapoler les données à l'amplitude nulle comme sur la figure 6. La pulsation naturelle est alors égale à $\omega_0=2\pi/T_0$.

Pour cela procéder de la façon suivante :

-Ecarter le pendule manuellement d'un angle θ_m de sa position de repos ;

-Faire exécuter la commande ***Fichiers*/*Enregistrer*** (ou appuyer sur le bouton ***Enregistrer***) et donner un nom de fichier de même que le nombre de points. Il est conseillé de donner des noms de fichiers simples de manière à pouvoir les rattacher plus tard à l'expérience à laquelle ils appartiennent (exemple EX11, Ex12 …pour fichiers 1, 2… de l'expérience 1) et de choisir un nombre de points assez élevé (1000 par exemple) pour avoir 5 cycles au minimum.

-Cliquer sur le bouton ***Valider*** et lâcher en même temps le pendule.

-Faire des enregistrements pour des angles initiaux θ_m différents (ne pas oublier de le faire aussi pour des angles initiaux faibles)

-Charger l'un après l'autre les fichiers enregistrés à l'aide de la commande ***Fichiers/Ouvrir.***

-Faire afficher la courbe correspondant à l'écart angulaire en fonction du temps (***Traitement/Courbes Temporelles*** en prenant soin de cocher la case ***Angle(Temps)).***

-Déterminer à l'aide du mode Curseur (***Traitement/Curseur*** ou bouton ***Curseur***) l'angle initial θ_m de même que la période du signal.
Noter dans un tableau les valeurs des périodes T en fonction des valeurs θ_m et tracer la courbe $T(\theta_m)$.

Remarque importante: Faire cette mesure soigneusement parce que la connaissance de T_0 donc de ω_0 est capitale pour la suite des manipulations.

EXPERIENCE 2

Pour déterminer l'amortissement b/I en fonction du réglage du micromètre.

Remarque: Le micromètre est gradué 1/2 mm par 1/2 mm, la couronne graduée comporte 50 subdivisions donnant donc la précision du 1/10 de mm.

Méthode 1

Supprimer tout signal de couple (excitateur "Pendulum Driver ” éteint (power off)) et positionner le micromètre sur la valeur désirée. Mettre l'appareil debout (axe vertical) de sorte que le pendule se déplace dans un plan horizontal. Ceci supprime l'effet de la gravité. Dans ce cas l'équation de mouvement devient:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5)$$

Si l'on impose une rotation initiale au pendule à la main, montrer que sa vitesse angulaire va décroître tout simplement avec le temps selon:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_0 \exp\left[-(b/I)t\right] \quad (6)$$

où $\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_0$ est la vitesse initiale. Ceci apparaît sur la figure 7.

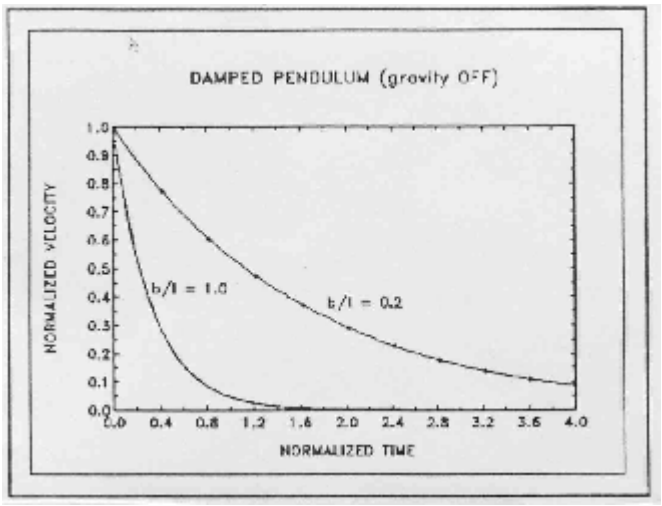


Figure 7

En enregistrant une série temporelle de données et en comparant les valeurs de dθ/dt en fonction du temps avec celle d'une exponentielle décroissante en ajustant la valeur de b/I, on peut construire le graphe de b/I en fonction de la valeur lue au micromètre.

Mode opératoire.

- Mettre le pendule debout (**axe de rotation à la verticale** ; utiliser le niveau mis à votre disposition pour s'assurer que l'axe du pendule est bien vertical).

- Positionner le micromètre sur la valeur désirée.

- Faire exécuter la commande ***Fichiers/Enregistrer*** (ou appuyer sur le bouton ***Enregistrer***)

- Donner une rotation au pendule à la main puis cliquer immédiatement sur le bouton ***Valider*** ou frapper sur la touche ***Entrée***.

-Enregistrer des valeurs de dθ/dt pour des positions variées du micromètre.

-Charger l'un après l'autre les fichiers enregistrés.

-Pour chaque fichier, afficher la courbe temporelle (***Traitement/Courbes Temporelles***) de la Vitesse Angulaire en fonction du temps (cocher la case ***Vitesse Angulaire(Temps)***)

-Choisir l'intervalle de temps utile en vue de la modélisation par la fonction A*expo(-B*t) en précisant les valeurs de ***t0*** et ***t1*** dans le tableau qui s'ouvre après ***Traitement/Courbes Temporelles***.
Afficher la région à modéliser et déterminer la valeur de ***A*** à l'aide du mode ***Curseur*** .

-Passer en mode modélisation (***Traitement/Modéliser***). Remplir la case ***A*** par la valeur obtenue précédemment ; tester plusieurs valeurs de ***B*** jusqu'à superposition des courbes expérimentale et de modélisation. Noter la valeur de B correspondante qui est celle de b/I.

-Noter dans un tableau les valeurs de b/I en fonction de la position du micromètre.

-Tracer la courbe de b/I en fonction de la position du micromètre.
du menu **Traitement.**

Méthode 2

Ne faire cette expérience qu'en fin de TP, si vous disposez de suffisamment de temps.

Supprimer tout signal de couple et positionner le micromètre à la valeur désirée. Déplacer à la main la masse du pendule d'un angle initial faible puis le lâcher
Sous ces conditions l'équation générale du mouvement se réduit à:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\theta = 0 \qquad (7)$$

Dans le cas amorti (avec $\omega > b/I$) montrer que la solution analytique vaut:

$\theta = \theta_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t)$ où $\alpha = b/I$ et $\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \alpha^2)$ avec $\omega_0 = \sqrt{mgr/I}$.

Des oscillations amorties sont montrées sur la figure suivante pour deux valeurs de b/I.

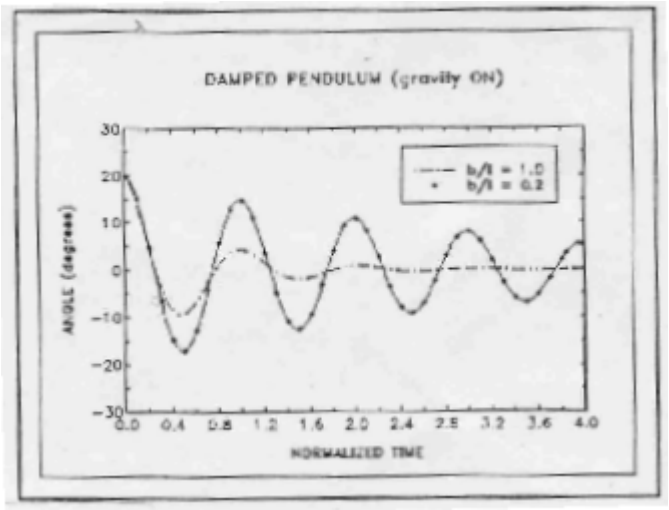


Figure 8

Le temps a été normalisé en unités de T_0. Puisque w_0 à déjà été déterminé dans l'expérience 1 et θ_0 est l'angle initial, l'expression ci-dessus pourrait être comparée aux données expérimentales en ajustant la valeur du seul paramètre α. Le paramètre relatif d'amortissement est alors donné par $b/I=2\alpha$. En répétant cette procédure pour un certain nombre de positions du micromètre on peut construire la courbe de calibration de b/I en fonction de la distance séparant la plaque d'amortissement de l'aimant annulaire.

<u>Manipulation:</u>

1) Positionner le micromètre sur la valeur désirée.

2) Enregistrer le fichier (500 données au minimum). Recommencer pour une série de positions différentes du micromètre.

3) A l'aide de la fonction curseur (menu *Traitement/Curseur* ou bouton *Curseur*), déterminer le décrément logarithmique (cf TP Utilisation d'un Logiciel d'Acquisition de Données).

Noter dans un tableau les valeurs de α en fonction de la position du micromètre.

Tracer la courbe de b/I (2 α) en fonction de la valeur lue au micromètre.

Dans le compte-rendu on prendra soin d'expliquer comment l'on a déterminé le décrément logarithmique.
Facultatif: Si vous avez eu le temps de faire les deux méthodes, comparer les résultats obtenus par l'une et l'autre. Faire ressortir les avantages et les désavantages de chacune d'elles.

EXPERIENCE 3

Détermination de la relation entre la tension d'entrée et le moment. (expérience de calibration du couple)

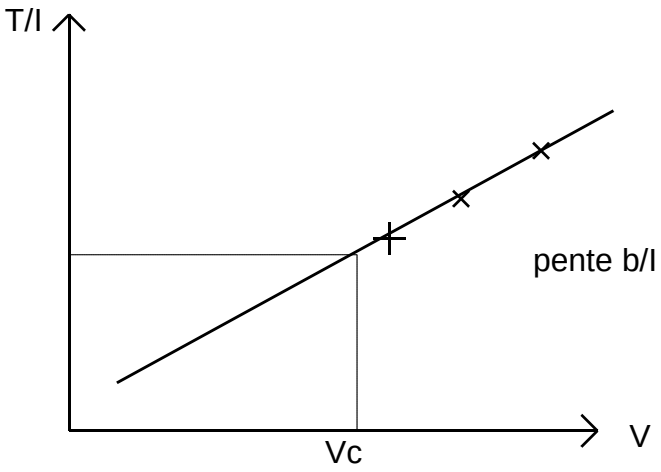
Mettre l'appareil debout (avec l'axe du pendule vertical) de sorte que l'effet de la gravitation soit annulé. Commencer en appliquant une tension continue de 0,5 V environ sur l'excitateur. Ajuster le micromètre (amortissement) de sorte que le pendule ne tourne pas à plus de 1000 tours par minute (de plus, faire en sorte que la courbe enregistrée reste dans les limites de l'écran). Dans ces conditions l'équation du mouvement s'écrit:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = T \qquad (8)$$

Le pendule va accélérer jusqu'à atteindre une vitesse limite. On a alors $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ qui reporté dans l'équation précédente donne:

$$\frac{T}{I} = \left[\frac{b}{I}\right]\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{limitee} \qquad (9)$$

En mesurant la vitesse limite pour différentes tensions appliquées, on peut construire le graphe du couple T/I en fonction de V qui aura l'allure suivante.



Vc: tension critique (qui met le pendule juste à 90°)

Un tel graphe révèlera les défauts de linéarité du circuit excitateur depuis les bobines excitatrices jusqu'à la géométrie du disque magnétique annulaire.

Le couple critique du pendule vaut: T_c= mgr. Dans le cas où l'axe du pendule est horizontal, cette valeur du couple appliqué va entraîner un déplacement du pendule de 90°. Une augmentation infinitésimale de moment T au-dessus de la valeur Tc mettra le pendule en rotation. En unités normalisées T_c/I = mgr / I. Par ailleurs la pulsion propre du pendule est donnée par ω_0^2= mgr/I et ainsi $T_c/I=\omega_0^2$ où ω_0 a été déterminé auparavant dans l'expérience 1. Ainsi T_c/I peut être déterminé et, à partir de la courbe de calibration couple/tension, on peut en déduire la tension d'excitation critique V_c correspondante.

Manipulation

-Appliquer à l'aide de l'alimentation en tension continue, une tension sur l'entrée dénommée « Calibrate Torque » derrière l'excitateur (« Pendulum Driver »). **Ne jamais dépasser 1.5 V.**

-Mettre le « pendulum driver » sur on.

-Enregistrer pour des valeurs de tension variées des séries de dθ/dt en fonction du temps (prendre au moins 500 points).

-Afficher les courbes temporelles (***Vitesse Angulaire (Temps***)) puis déterminer dans chaque cas à l'aide du curseur la vitesse angulaire moyenne correspondante.
-Connaissant b/I (déduit à l'aide de la courbe précédente en y portant la position du micromètre), calculer T/I et tracer la courbe T/I = f(V).
Déterminer V_c.
Ne pas hésiter à recommencer les mesures si une valeur paraît erronée.

SIMULATION D'UNE JONCTION JOSEPHSON

Analogie Mécanique-Supraconductivité: Lecture théorique

Une jonction de type Josephson est un dispositif supraconducteur composé de deux éléments. Le phénomène est gouverné par les équations suivantes:

$$I_s = I_c \sin(\varphi); \quad d\varphi/dt = 2\varphi V/\eta$$

où φ est un paramètre relatif aux phases des supraconducteurs de chaque côté de la jonction, η la constante de Planck divisé par 2π, I_c est le "courant critique" de la jonction et I_s et V respectivement les supracourant et tension de la jonction. Si la jonction a une résistance de fuite R et une capacité de shunt C, alors le courant total de polarisation est composé de trois termes:

$I_s = I_c \sin(\varphi)$	à travers la jonction
$I_a = V / R$	à travers la résistance
$I_b = CdV/dt$	à travers la capacité

Donc: $$\frac{\hbar C}{2e}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR}\frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin\varphi = I$$

En comparant cette équation à celle du pendule,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\sin\theta = T$$

On peut remarquer les correspondances évidentes entre les systèmes mécanique et supraconducteur:

$$b/I \leftrightarrow I/R_c$$
$$\omega_0^2\text{-}mgr/I \leftrightarrow \omega_p^2 = 2eI_c/\eta C$$
$$T_c \leftrightarrow I_c$$

Ainsi le pendule excité est l'équivalent mécanique de la jonction Josephson. Cependant la fréquence ω_p (de plasma) caractéristique d'une jonction est typiquement de l'ordre de 10^{11}, tandis que pour un pendule ω_0 vaut moins de 10. Le pendule est effectivement un modèle à mouvement lent d'une jonction de type Josephson.

EXPERIENCE 4

Ne faire cette expérience qu'en fin de TP, si vous disposez de suffisamment de temps.

Observation de *l'hysteresis* dans le cas du pendule excité.

Si un couple constant est appliqué au pendule, très lentement croissant à partir de 0, l'angle du pendule va également croître très lentement. Lorsque le couple atteint sa valeur critique T_c , l'angle sera exactement égal à 90°. Une très légère augmentation de T au-dessus de T_c va entraîner la soudaine rotation du pendule. La vitesse angulaire ne sera pas constante mais au contraire elle va onduler légèrement entre des valeurs maximales et minimales. Soit la valeur moyenne de . Sur la figure 9, on montre un diagramme théorique de en fonction de .

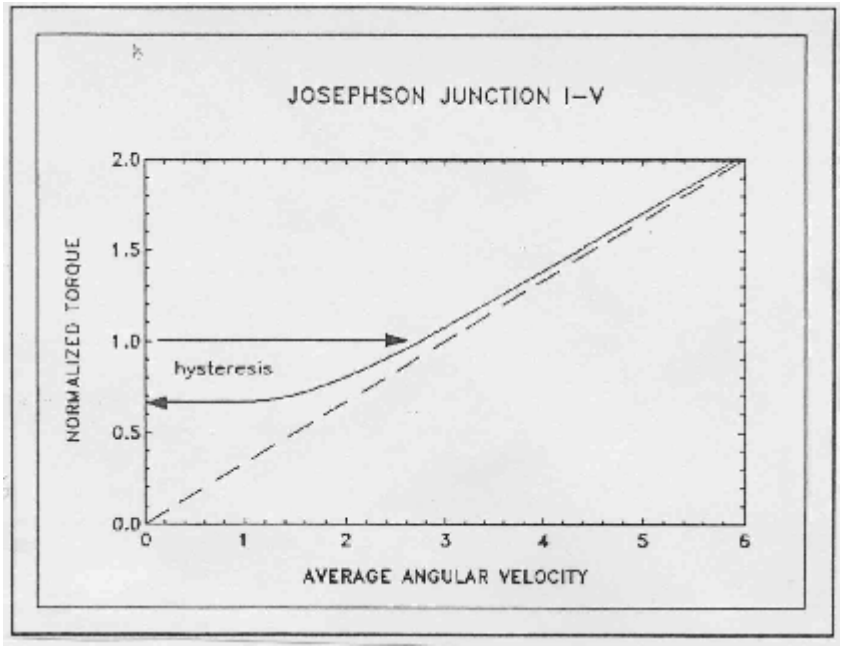


Figure 9

Remarque: une fois que le pendule tourne, le couple peut être diminué au dessous de la valeur critique T_c jusqu'à avant qu'une transition brutale vers un état oscillatoire et non plus rotatif avec =0 ne prenne place C'est un exemple du phénomène d'hystérésis qui, pour le pendule est dû à l'inertie, tandis que le même comportement dans la jonction Josephson provient de la capacité équivalente du dispositif.

Positionner l'amortissement pour un facteur . Appliquer des tensions de couple croissantes en commençant juste en dessous de V_c jusqu'à .
La tension de couple est appliquée en appuyant sur le bouton Drive du générateur de couple. On fait varier cette tension à l'aide du potentiomètre "Amplitude". La valeur de la tension appliquée peut être lue en branchant un voltmètre à la sortie "Drive Amplitude" derrière le générateur de tension excitatrice.

Pour chaque tension appliquée, enregistrer les valeurs des couples $\theta(t)$ et $d\theta/dt$. Noms des fichiers: Ex41, Ex42... Mesurer les valeurs de à l'aide du Curseur et tracer le graphe correspondant. Faire décroître ensuite

progressivement la tension de couple en enregistrant les vitesses angulaires pour chaque valeur de V jusqu'à la transition vers un régime non rotatoire. Tracer le graphe correspondant et en déduire la valeur de l'hystérésis.

Reprendre la procédure précédente pour d'autres valeurs de Q et noter le changement dans la valeur de l'hystérésis.

RESONANCE

Si le pendule est soumis à un couple harmonique suffisamment faible pour que les oscillations résultantes soient de faible amplitude (ainsi $\sin\theta=\theta$) alors l'équation du mouvement devient:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\theta = T\sin(\omega t)$$

La solution stationnaire de cette équation vaut:

$$\theta = \frac{T_\circ / I}{\sqrt{(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + (b/I)^2\omega^2}}\ \sin(\omega t - \phi)$$

où

Ainsi après que le régime transitoire initial se soit amorti, le pendule va osciller à la fréquence imposée, soit ω, mais avec un déphasage ϕ. La figure 10 illustre la réponse en amplitude du système pour. Il apparaît que pour un amortissement b/I donné, les oscillations auront un maximum d'amplitude pour une pulsation légèrement inférieure à la pulsation naturelle ω_0. En réalité l'expression de cette fréquence optimum d'excitation vaut $\omega^2=\omega_0^2-(b/I)^2/2$.

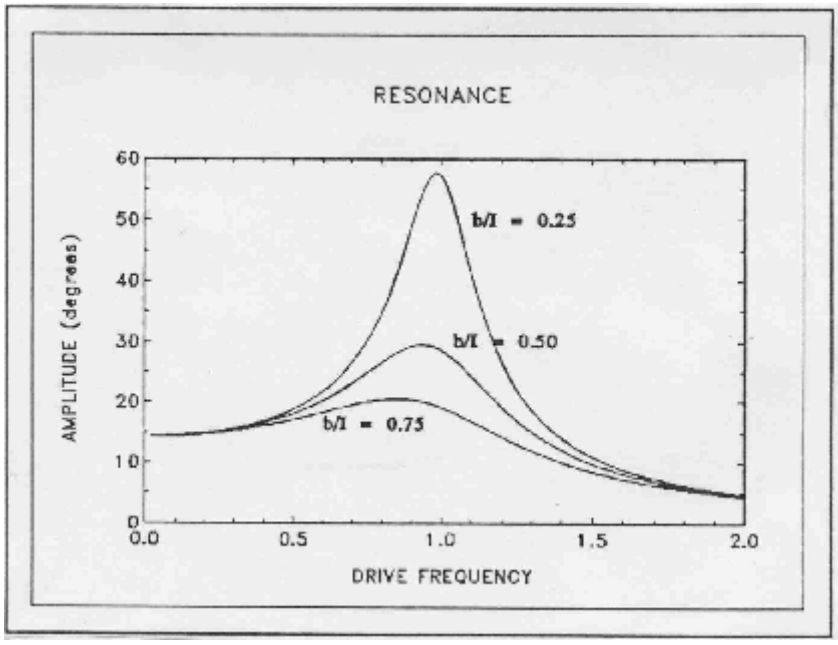


Figure 10.

L'équation de départ peut être mise sous la forme:

où est le facteur de qualité de la résonance pour ce système de second ordre. Sur la figure précédente les différents pics correspondent à des valeurs de de 4.0, 2.0, et 1.33. Remarquons que le réglage du micromètre détermine b/I et par conséquent contrôle effectivement le facteur Q sur une gamme de valeur considérable. L'équation du mouvement est une approximation linéaire de l'équation différentielle générale et n'est valable que pour un mouvement du pendule ayant de faibles déplacements angulaires (c'est-à-dire un fort amortissement et/ou faible couple d'excitation). Autrement la non linéarité due à $\sin\theta$ deviendra importante et des écarts par rapport aux prédictions précédentes interviendront.

EXPERIENCE 5

Etude du pendule à la résonance

Régler le micromètre de sorte que le facteur Q soit de l'ordre de 4 ou 5 (cela sera déterminé à partir des valeurs de b/I et déjà connues). Régler l'amplitude du "Pendulum Driver" pour avoir des oscillations du pendule d'environ 20 à 30 degrés lorsque la fréquence d'excitation est égale à : $\nu_\circ =$. Déterminer ensuite dans une gamme de fréquence du générateur comprise entre 0,5 et 1,5 la moyenne des déplacements angulaires extremum du pendule vers la droite et la gauche. Les résultats sont obtenus en enregistrant des séries d'oscillations pour chaque fréquence d'excitation. Un graphe de $\theta_{max}(t)$ en fonction de ω (ou de ν) fera apparaître le pic de résonance. Cette expérience peut être répétée pour différentes valeurs de Q. Comparer les courbes de résonance obtenues avec les prévisions théoriques.

Remarque: Faire varier les fréquences dans le sens croissant

Recommencer la procédure précédente, mais cette fois avec des amplitudes d'oscillation beaucoup plus grandes (de l'ordre de 60 à 80 degrés à la fréquence de résonance). Comparer les résultats obtenus aux précédentes. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

CHAOS

Dans la section précédente concernant la résonance, un couple excitateur harmonique faible avait été appliqué au pendule, à des fréquences encadrant la fréquence naturelle . On a vu qu'il en résultait un état stationnaire également harmonique à la fréquence ω déphasé d'un angle Φ et qui présentait un maximum d'amplitude quand . Ce comportement est localisé à une petite région de l'espace des états, caractérisée par deux paramètres de couple . Partout ailleurs dans l'espace des états, des mouvements beaucoup plus complexes résultent de l'application d'un couple sinusoïdal à ce système non linéaire. L'équation différentielle régissant le pendule:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgr\sin\theta = T\sin(\omega t)$$

étant déterministe, le résultat "classique" sera un mouvement périodique ou multi-périodique. En d'autres termes, les oscillations demeureront répétitives, toujours avec la même périodicité, avec éventuellement plusieurs périodes d'excitation. Tandis que cette représentation est parfaitement correcte pour de faibles amplitudes d'excitation (cas pour lequel la non linéarité contribue peu) ou pour de grandes fréquences d'excitation, ce n'est plus le cas dans les régions de l'espace des états définies approximativement par les conditions et . Dans ce domaine de ( ) un comportement chaotique va apparaître.

Pour le pendule, le chaos se manifeste par des oscillations et/ou des rotations qui ne présentent pas un caractère de répétabilité. La courbe décrite dans l'espace des phases ( ) est en perpétuel changement. Le mouvement par conséquent sera intrinsèquement imprévisible.

EXPERIENCE 6

Il est suggéré d'explorer expérimentalement la dynamique chaotique du pendule excité en choisissant différentes amplitudes et fréquences dans le domaine précédemment défini. On observera alors les résultats dans l'espace des phases et sur le diagramme de Poincaré (appelé aussi section de Poincaré). Une valeur de Q comprise entre 4 et 5 est appropriée à ce type d'étude.